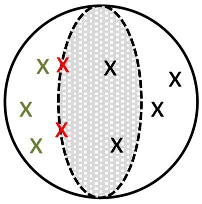
(1) Dans sa forme la plus simple, le *principe des tiroirs* de Diriclet (1805-1859) **stipule que si *n* objets occupent *m* tiroirs avec *n* > *m*, alors au moins un des tiroirs doit contenir plus d'un objet.**
(voir http://villemin.gerard.free.fr/Denombre/CombTiro.htm)
Quelle est la probabilité $P_{6/9}$ que six de neuf points tirés au hasard sur la surface d'une sphère se trouvent sur un même hémisphère ? Est-il vrai que, si on tire cinq points dans un cercle de rayon r, au moins deux d'entre eux se trouvent à une distance inférieure à $\sqrt{2}\,r$?

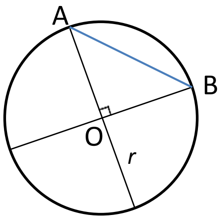
Réponses : $P_{6/9} = 1$; oui

Démonstrations :



Soit le grand cercle passant par deux quelconques des 9 points (rouges sur la figure), qui définit ainsi deux hémisphères (*la trace de ce grand cercle sur la surface est bien entendu infiniment mince*). Il y a donc nécessairement au moins six points dans un des deux hémisphères ! Donc, $P_{6/9} = 1$.

Considérons un cercle de rayon *r,* de centre O. Puisqu'on tire 5 points au hasard, il y en a au moins deux qui se situent dans un des quadrants définis par deux diamètres perpendiculaires.
Supposons qu'ils se situent dans le quadrant OAB sur la figure ci-dessous.



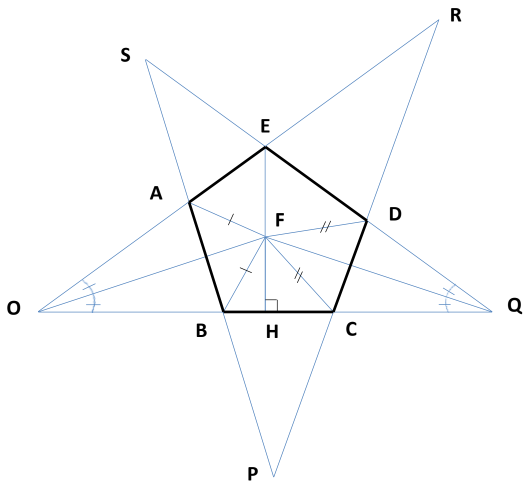
La distance maximale de deux points dans ce secteur est la longueur de AB, soit $\sqrt{2}$ r.

(2) Soit un pentagone équiangle convexe non régulier dont les sommets successifs sont A,B,C,D,E. Soit F le point situé à équidistance de A et de B, ainsi que de C et de D. Que vaut l'angle AEF ?

Réponse : 54°

Démonstration :

Considérons le pentagramme OPQRS dont les sommets sont les intersections des droites-supports des côtés du pentagone.



Puisque les angles au sommet du pentagone sont égaux (108°), les triangles OBA, PCB, QDC, RED, SAE sont isocèles et semblables. Les angles au sommet du pentagramme sont alors égaux à 36°. Le triangle EOQ est donc isocèle. Ainsi, par construction, FO et FQ sont les bissectrices des angles AOB et CQD respectivement. En conséquence, la droite-support de EF, qui coupe BC en H, est la hauteur du triangle isocèle EOQ issue de E, et aussi la bissectrice de l'angle OEQ. L'angle AEF est donc égal à la moitié de l'angle au sommet d'un pentagone équiangle, soit 54°.

Remarque : le pentagone régulier, et surtout le pentagramme régulier qui est apparu en Mésopotamie vers 3000 ans avant notre ère, ont conduit à bien des interprétations ésotériques de leur forme au fil des âges de l'humanité. En particulier, le pentagramme est considérée comme le symbole des Cinq Éléments, *l'esprit, la terre, l'eau, le feu et l'air*.

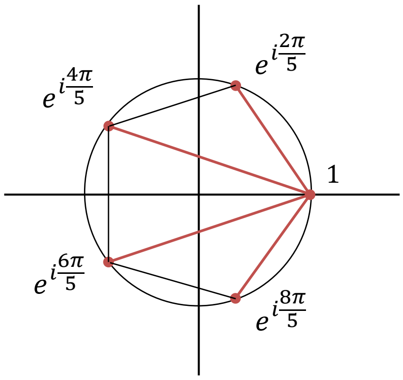
(3) Soit un polygone régulier à *n* sommets, inscrit dans un cercle de rayon 1. Si on joint un des sommets à tous les autres, on obtient (*n*-1) segments de droite, appelés *diagonales*. Démontrer que le produit de leur longueur est égal à *n*.

Suggestion : dans le plan complexe, il est utile de considérer le cercle exinscrit au polygone comme le cercle trigonométrique.

Démonstration :

Considérons le repère du plan complexe tel que son origine soit le centre du cercle circonscrit au polygone régulier, et tel que l'axe des réels passe par le sommet dont sont issues les diagonales.

Cas où $n = 5$



Dans ce repère, les n sommets ont pour coordonnées : $1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}$.

Le produit de la longueur des diagonales est alors : $\left|\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(1-e^{i\frac{4\pi}{n}}\right)\dots\left(1-e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}\right)\right|$.

Remarque : le produit des deux nombres complexes correspondant à deux segments symétriques par rapport à l'axe des réels est un nombre réel. Comme le faisceau de diagonales est symétrique par rapport à l'axe des réels tel que défini, $\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(1-e^{i\frac{4\pi}{n}}\right)\dots\left(1-e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}\right)$ est donc un nombre réel.

Rappelons que les nombres $1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}$ sont les racines de (X^n-1), dont la factorisation, en faisant apparaître la racine de valeur 1, est alors : $(X^n-1) = (X-1)(1+X+X^2+\dots+X^{n-1})$.

$e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}$ sont donc les racines de $(1+X+X^2+\dots+X^{n-1})$, qu'on factorise sous la forme :

$$(1+X+X^2+\dots+X^{n-1}) = \left(X-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{n}}\right)\dots\left(X-e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}\right)$$

Pour $X = 1$, on obtient : $(1+1+1+\dots+1) = \left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(1-e^{i\frac{4\pi}{n}}\right)\dots\left(1-e^{i\frac{(n-1)4\pi}{n}}\right)$, ce qui donne :

$$\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(1-e^{i\frac{4\pi}{n}}\right)\dots\left(1-e^{i\frac{(n-1)2\pi}{n}}\right) = n$$

CQFD

(4) Quel est le plus petit nombre entier *n* > 0, divisible par 126, tel que son carré est un cube et son cube, un carré ?

Réponse : 42^6

Démonstration : si n^2 est un cube, alors n doit lui-même être un cube. De façon analogue, si n^3 est un carré, alors n doit être aussi un carré. Donc $n = k^6$ avec k entier > 0. Comme n est divisible par $126 = 2 \times 3^2 \times 7$, k doit être divisible par 2, par 3 et par 7, soit par 42. Le plus petit nombre n est donc 42^6.